MA2115 Clase 12: Cambio de variable.

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

1 Cambio de variable

Cuando una ecuación diferencial de primer orden no se puede reducir fácilmente a una de las formas estudiadas, es posible reducirlas cambiando una o ambas variables. Siempre que un cambio sea simple y obvio vale la pena intentarlo. Veamos algunos ejemplos típicos.

Ejemplo 1 *Resuelva la ecuación diferencial* $(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$.

Solución: Sea $u=xy$, $\dfrac{du}{dx}=y+x\dfrac{dy}{dx}$, entonces $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{du}{dx}-y\right)$. De $(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}=-\frac{y+xy^2}{x-x^2y} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-y(1+xy)}{x(1-xy)}\\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{x}\left(\frac{du}{dx}-y\right)=\frac{-y}{x}\frac{(1+u)}{(1-u)}\\
&\Longrightarrow \quad \frac{du}{dx}-y=\frac{-xy}{x}\frac{(1+u)}{(1-u)}\\
&\Longrightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{u}{x}+\frac{-u}{x}\frac{(1+u)}{(1-u)}\\
&\Longrightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{u}{x}\left(1-\frac{(1+u)}{(1-u)}\right)=\frac{u}{x}\left(\frac{-2u}{1-u}\right)\\
&\Longrightarrow \quad \frac{u-1}{u^2}du=\frac{2dx}{x}.
\end{aligned}$$

Es decir, obtenemos una ecuación de variables separables.

Ejemplo 2 *Resolver* $\dfrac{dy}{dx}+x(y-x)+x^3(y-x)^2=1$.

Solución: Sea $u=y-x$, entonces $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{dy}{dx}-1$. Así, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}+1$. La ecuación se reduce a

$$\frac{du}{dx}+1+xu+x^3u^2=1$$

de donde obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{du}{dx}+xu+x^3u^2=0.$$

Ejemplo 3 *Resuelva la ecuación diferencial* $e^{-y}\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right)=xe^{x}$.

Solución: Multiplicando por e^{y} en ambos miembros de la ecuación $e^{-y}\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right)=xe^{x}$ obtenemos $\dfrac{dy}{dx}+1=xe^{x+y}$. Sea $u=x+y$, $\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{dy}{dx}$. Entonces, substituyendo en $\dfrac{dy}{dx}+1=x+e^{x+y}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx}=xe^{u} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{du}{e^{u}}=xdx\\
&\Longrightarrow \quad -e^{-u}=\frac{x^2}{2}+C\\
&\Longrightarrow \quad -e^{-(x+y)}=\frac{x^2}{2}+C\\
&\Longrightarrow \quad e^{-(x+y)}=-\frac{x^2}{2}-C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4 *Resolver* $2xe^{2y}\dfrac{dy}{dx}=3x^4+e^{2y}$.

Solución: Sea $w=e^{2y}$, de donde $\dfrac{dw}{dx}=2e^{2y}\dfrac{dy}{dx}$. Substituyendo en la ecuación $2xe^{2y}\dfrac{dy}{dx}=3x^4+e^{2y}$, tenemos que

$$x\frac{dw}{dx}=3x^4+w$$

y así obtenemos la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dw}{dx}-\frac{1}{x}w=3x^3.$$

Ahora multiplicando el factor integrante $\mu(x)=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=x^{-1}$, y luego integrando con respecto a x, tenemos que

$$\frac{w}{x}=\int 3x^3dx=\frac{3}{4}x^4+C$$

de donde

$$e^{2y}=w=\frac{3}{4}x^5+Cx.$$

Finalmente, $y=\ln\sqrt{\dfrac{3}{4}x^5+Cx}$.

Ejemplo 5 *Resolver* $6y^2dx-x(2x^3+y)dy=0$.

Solución: Multiplicando por x^2 obtenemos

$$6y^2x^2dx-x^3(2x^3+y)dy=0. \tag{1}$$

Sea $w = x^3$, con lo cual $dw = 3x^2 dx$. Substituyendo en la ecuación (1), tenemos que

$$\frac{dw}{dy} - \frac{w}{2y^2}(2w + y) = 0 \Longrightarrow \frac{dw}{dy} = \left(\frac{w}{y}\right)^2 + \frac{w}{2y}.$$

Sea $z = \dfrac{w}{y}$, de donde $w = zy$ y así $\dfrac{dw}{dy} = z + y\dfrac{dz}{dx}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
z + y\frac{dz}{dy} = z^2 + \frac{1}{2}z \quad &\Longrightarrow \quad y\frac{dz}{dy} = z^2 - \frac{z}{2} \\
&\Longrightarrow \quad y\frac{dz}{dy} = \frac{2z^2 - z}{2} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{2dz}{z(2z-1)} = \frac{dy}{y} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{4dz}{2z-1} - \frac{2dz}{z} = \frac{dy}{y} \\
&\Longrightarrow \quad 2\ln|2z-1| - 2\ln|z| = \ln|y| + \ln|C| \\
&\Longrightarrow \quad (2z-1)^2 = Cyz^2.
\end{aligned}$$

Como $w = zy$ entonces $z = \dfrac{w}{y} = \dfrac{x^3}{y}$ y, finalmente,

$$\left(2\frac{x^3}{y} - 1\right)^2 = Cy\frac{x^3}{y}.$$

Ejemplo 6 *Resolver* $(y + xy^2)dx + (x - x^2y)dy = 0.$

Solución: La ecuación $(y + xy^2)dx + (x - x^2y)dy = 0$ es equivalente a

$$(x - x^2y)\frac{dy}{dx} = -(y + xy^2). \tag{2}$$

Sea $z = xy$. Entonces, $\dfrac{dz}{dx} = y + x\dfrac{dy}{dx} \Longrightarrow x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - y$, y así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx} - y\right). \tag{3}$$

Substituyendo (3) en (2), tenemos que

$$\begin{aligned}
(x-x^2y)\frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx}-y\right)=-(y+xy^2) \quad &\Longrightarrow \quad (x-xz)\frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx}-y\right)=-(y+yz)\\
&\Longrightarrow \quad (1-z)\left(\frac{dz}{dx}-y\right)=-y(1+z)\\
&\Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx}-y=-y\frac{1+z}{1-z}\\
&\Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx}=-y\frac{1+z}{1-z}+y\\
&\Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx}=\frac{y(1-z)-y(1+z)}{1-z}\\
&\Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx}=\frac{-2yz}{1-z}.
\end{aligned}$$

Como $y=\frac{z}{x}$, tenemos que $\frac{dz}{dx}=\frac{2z^2}{x(z-1)}$. Por lo tanto, $\frac{(z-1)dz}{z^2}=\frac{2dx}{x}$.

2 Reducción a una ecuación de variables separables

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(ax+by+c\right), \quad b\neq 0,$$

puede reducirse a una ecuación de variables separables mediante la substitución $u=ax+by+c$.

Ejemplo 7 *Resuelva la ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx}=(x+y+1)^2$.

Solución: Sea $u=x+y+1$. Entonces $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$, de donde $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$. Así, $\frac{du}{dx}-1=u^2$, con lo cual

$$\frac{du}{dx}=u^2+1\Rightarrow\frac{du}{u^2+1}=dx\Rightarrow \operatorname{arctg}u=x+C.$$

Devolviendo el cambio de variable, obtenemos finalmente que

$$\operatorname{arctg}(x+y+1)-x=C\Leftrightarrow x+y+1=\operatorname{tg}(x+C)\Leftrightarrow y=\operatorname{tg}(x+C)-x-1.$$

Ejemplo 8 *Resuelva la ecuación diferencial* $y'=\frac{\cos(x+y+1)}{1-\cos(x+y+1)}$.

Solución: Sea $u=x+y+1$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1\\
&\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}-1=\frac{\cos u}{1-\cos u}\\
&\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{\cos u}{1-\cos u}+1\\
&\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{\cos u+1-\cos u}{1-\cos u}\\
&\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{1-\cos u}\\
&\Rightarrow \quad (1-\cos u)du=dx.
\end{aligned}$$

Integrando obtenemos

$$\begin{aligned}
u-\operatorname{sen} u &= x+C\\
(x+y+1)-\operatorname{sen}(x+y+1) &= x+C\\
y+1-\operatorname{sen}(x+y+1) &= C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9 *Encuentre la solución general de la ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y+1}$.

Solución: Haciendo el cambio de variable $u=x+y+1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= 1+\frac{dy}{dx},\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx}-1,
\end{aligned}$$

y substituyendo en la ecuación original obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u} \quad &\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+1=\frac{1+u}{u}\\
&\Rightarrow \quad \frac{u}{1+u}du=dx\\
&\Rightarrow \quad \left(1-\frac{1}{1+u}\right)du=dx\\
&\Rightarrow \quad u-\ln|1+u|=x+C.
\end{aligned}$$

Finalmente, devolviendo el cambio de variable, obtenemos

$$\begin{aligned}
x+y+1-\ln|2+x+y| &= x+A\\
y+1-A &= \ln|2+x+y|\\
e^{y+1-A} &= 2+x+y\\
e^{1-A}e^{y} &= 2+x+y.\\
Be^{y} &= 2+x+y
\end{aligned}$$

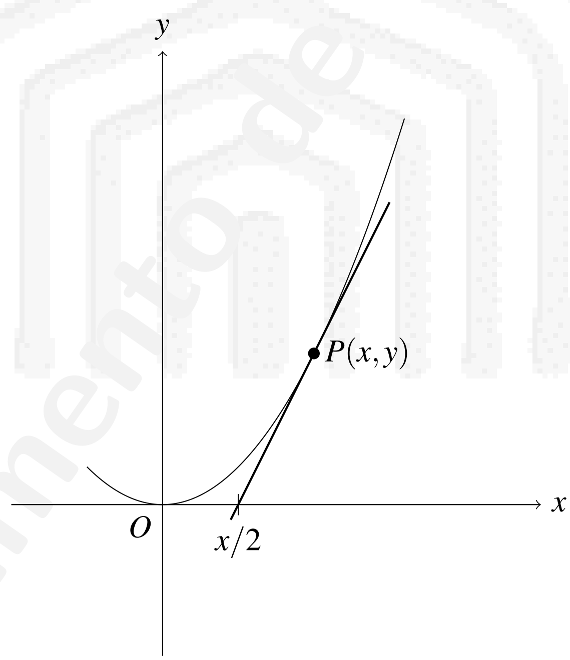
Ejemplo 10 *Sea $\mathscr{F}$ la familia de curvas tal que en un punto $P(x,y)$ de una curva $\mathscr{C}$, de la familia $\mathscr{F}$, la tangente a $\mathscr{C}$ en P corta con el eje de las abscisas en un punto de abscisa $x/2$. Hallar*

a) *La familia de las curvas de la familia $\mathscr{F}$.*

b) *La familia de las curvas ortogonales a la familia $\mathscr{F}$.*

c) *Bosquejar ambas familias.*

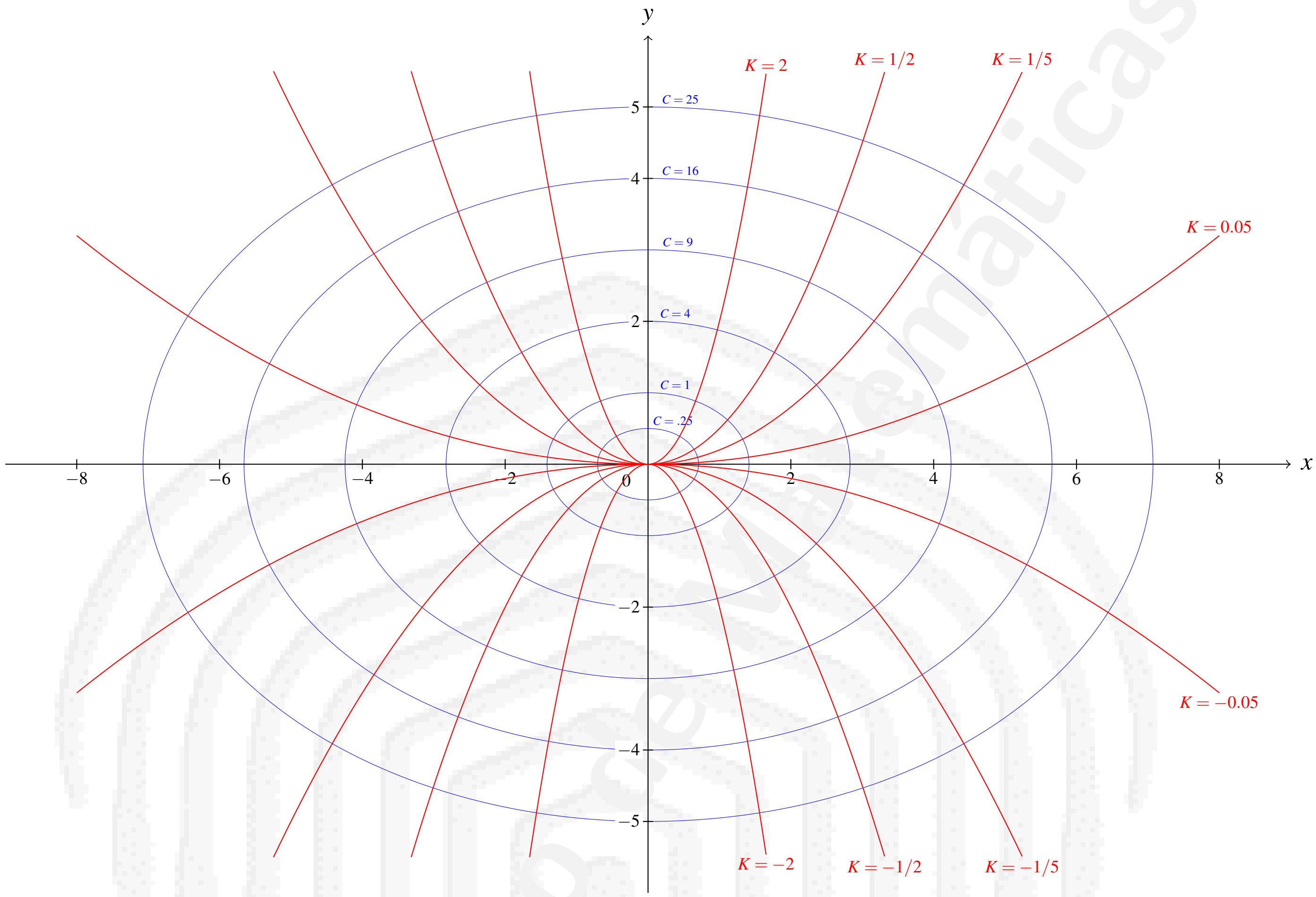
Solución: a) Pendiente de la recta tangente es $= \dfrac{y-0}{x-x/2} = \dfrac{2y}{x}$.



La ecuación diferencial de las curvas de la familia $\mathscr{F}$ es $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$. Integrando, tenemos que $\ln|y| = \ln x^2 + C$, de donde $y = Kx^2$, para alguna constante $K \in \mathbb{R}$.

b) La ecuación diferencial de las curvas ortogonales a $\mathscr{F}$ es $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{2y}$. Luego, $y^2 + \dfrac{x^2}{2} = C$,

c)



Gráfica de las elipse $\frac{x^2}{2}+y^2=C$.
Gráfica de las curvas $y=Kx^2$.

3 Ecuaciones diferenciables reducibles a homogéneas

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{4}$$

es una ecuación que puede reducirse a una ecuación homogénea mediante una substitución adecuada. El método consiste en lo siguiente:

Si se consideran las ecuaciones de las dos rectas:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1 &= 0, \\ a_2x+b_2y+c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Para un sistema así existen tres posibilidades mutuamente excluyentes: a) las rectas se intersectan en un único punto, b) las rectas no se intersectan ó c) las rectas son iguales. Trataremos el caso a) primero. En este caso, podemos realizar una traslación de las rectas de tal modo que el punto de intersección de las rectas coincida con el origen. En otras palabras, es posible hacer un cambio de variable de la forma

$$\begin{aligned} u &= x+a, \\ v &= y+b, \end{aligned}$$

donde (a,b) son las coordenadas del punto de intersección de las rectas, de tal manera que las ecuaciónes resultantes tengan la forma

$$\begin{aligned} a_1'u+b_1'v &= 0, \\ a_2'u+b_2'v &= 0. \end{aligned}$$

Como $u=x+a$, $v=y+b$, se tiene que $du=dx$, $dv=dy$ y la ecuación (4) se convierte en la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1(u-a)+b_1(v-b)+c_1}{a_2(u-a)+b_2(v-b)+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1'u+b_1'v}{a_2'u+b_2'v}\right).$$

Ejemplo 11 $(4x+3y+1)dx+(3x+2y+1)dy=0.$

Solución: Consideremos

$$\begin{aligned} L_1 &: 4x+3y+1=0, \\ L_2 &: 3x+2y+1=0. \end{aligned}$$

Las rectas L_1 y L_2 se intersectan en el punto $(-1,1)$, consideremos

$$\begin{aligned} u=x+1 &\quad \text{de donde} \quad du=dx, \\ v=y-1 &\quad \text{de donde} \quad dv=dy. \end{aligned}$$

Así, substituyendo en la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} [4(u-1)+3(v+1)+1] &+ [3(u-1)+2(v+1)+1]\frac{dv}{du}=0 \\ 4u-4+3v+3+1 &= -(3u-3+2v+2+1)\frac{dv}{du} \\ 4u+3v &= -(3u+2v)\frac{dv}{du} \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{du}=-\frac{4u+3v}{3u+2v}=-\frac{4+3\frac{v}{u}}{3+2\frac{v}{u}} \tag{5}$$

Sea $z=\frac{v}{u}$, luego $v=uz$.

$$\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du}. \tag{6}$$

Substituyendo (6) en (5) obtenemos

$$\begin{aligned}
z+u\frac{dz}{du} &= -\frac{4+3z}{3+2z} \\
u\frac{dz}{du} &= -\frac{4+3z}{3+2z}-z=\frac{-4-3z-3z-2z^2}{3+2z} \\
u\frac{dz}{du} &= \frac{-4-6z-2z^2}{3+2z} \\
\frac{(3+2z)dz}{4+6z+2z^2} &= -\frac{du}{u}
\end{aligned}$$

Sea $w=4+6z+2z^2$, entonces $dw=(6+4z)dz=2(3+2z)dz$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{dw}{w} &= -\frac{du}{u} \\
\ln|w| &= -2\ln(|Au|) \\
w &= (Au)^{-2} \\
4+6z+2z^2 &= \frac{B}{u^2} \\
4+6\frac{v}{u}+2\left(\frac{v}{u}\right)^2 &= \frac{B}{(x+1)^2} \\
4+6\frac{y-1}{x+1}+2\frac{(y-1)^2}{(x+1)^2} &= \frac{B}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 12 *Resolver* $y'=\dfrac{x+y-1}{x-2y}$.

Solución: $y'=\dfrac{x+y-1}{x-2y}$ Consideramos

$$\begin{aligned}
L_1 &: x+y-1=0, \\
L_2 &: x-2y=0.
\end{aligned}$$

Las rectas L_1 y L_2 se intersectan en $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$. Sean

$$\begin{aligned}
x=u+\frac{2}{3} \quad &\text{de donde} \quad dx=du, \\
y=v+\frac{1}{3} \quad &\text{de donde} \quad dy=dv.
\end{aligned}$$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{du}$, así que

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{du} &= \frac{u+\frac{2}{3}+v+\frac{1}{3}-1}{u+\frac{2}{3}-2v-\frac{2}{3}}=\frac{u+v}{u-2v} \\
\frac{dv}{du} &= \frac{1+\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}
\end{aligned}$$

es una ecuación homogénea. Sea $z=\frac{v}{u}\Rightarrow\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du}$. Luego,

$$\begin{aligned}
z+u\frac{dz}{du} &= \frac{1+z}{1-2z}\\
u\frac{dz}{du} &= \frac{1+z}{1-2z}-z=\frac{1+z-z+2z^2}{1-2z}\\
u\frac{dz}{du} &= \frac{1+2z^2}{1-2z}\Rightarrow\frac{1-2z}{1+2z^2}dz=\frac{du}{u}\\
\int\frac{dz}{1+2z^2}-\int\frac{2z}{1+2z^2}dz &= \int\frac{du}{u}\\
\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}z)-\frac{1}{2}\ln|1+2z^2| &= \ln|Au|
\end{aligned}$$

como $z=\frac{v}{u}$, $x=u+\frac{2}{3}, y=v+\frac{1}{3}$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}z) &= \frac{1}{2}\ln|1+2z^2|+\ln|Au|\\
\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}z) &= \ln|1+2z^2|+2\ln Au\\
\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\frac{v}{u}\right) &= \ln\left|Bu^2\left(1+2\left(\frac{v^2}{u^2}\right)\right)\right|\\
\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\frac{y-1/3}{x-2/3}\right) &= \ln\left|B(x-2/3)^2\left(1+2\left(\frac{(y-1/3)^2}{(x-2/3)^2}\right)\right)\right|\\
\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\frac{3y-1}{3x-2}\right) &= \ln\left|C\left((3x-2)^2+2(3y-1)^2\right)\right|.
\end{aligned}$$

Ahora estudiamos el caso en que las rectas de la ecuación (4) son paralelas. Como las rectas $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$ son paralelas, tenemos que

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
a_1 &= \lambda a_2,\\
b_1 &= \lambda b_2.
\end{aligned}$$

de donde, substituyendo en la ecuación (4), obtenemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\lambda a_2x+\lambda b_2y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right). \tag{7}$$

Sea $z=a_2x+b_2y$. Derivando con respecto a x tenemos que $\frac{dz}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}$. Despejando dy/dx de esta última, obtenemos $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right)$. Luego, substituyendo estas expresiones de z y dy/dx en la ecuación (7), obtenemos

$$\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right)\frac{1}{b_2}=f\left(\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2}\right)$$

de donde obtenemos la ecuación de variables separables

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= b_2 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) + a_2, \\
dz &= \left(b_2 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) + a_2\right) dx \\
\frac{dz}{b_2 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) + a_2} &= dx \\
\int \frac{dz}{b_2 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) + a_2} &= x + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 13 *Resolver* $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{2x+2y+2}$.

Solución: Si hacemos

$$\begin{aligned}
L_1 &: x + y - 3 = 0, \\
L_2 &: 2x + 2y + 2 = 0.
\end{aligned}$$

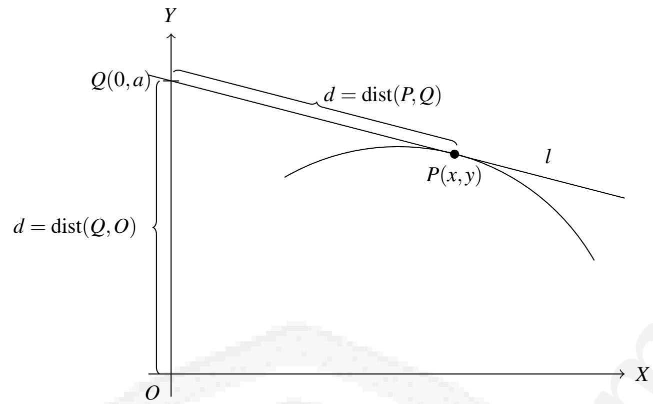
Vemos que son rectas paralelas. Sea $z = x + y$ entonces $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ luego $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$. Así,

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z-3}{2z+2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z-3}{2z+2} + 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{3z-1}{2z+2}
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{2z+2}{3z-1} dz &= dx \\
x + C &= \int \frac{2}{3} dz + \frac{8}{3} \int \frac{dz}{3z-1} \\
x + C &= \frac{2}{3} z + \frac{8}{9} \ln|3z - 1| \\
x &= \frac{2}{3}(x+y) + \frac{8}{9} \ln|3(x+y) - 1| + K.
\end{aligned}$$

Ejemplo 14 *Hallar la familia de curvas tal que si l es la recta tangente en el punto $P(x,y)$ a la curva y Q es el punto de intersección entre l y el eje Y, entonces la distancia de P a Q es igual a la distancia de Q al punto* $(0,0)$.



Solución: La ecuación de la recta tangente l está dada por $v - y = y'(u - x)$. El punto $Q(0,a)$ está en esta recta, entonces $a - y = y'(0 - x)$, por lo cual, $a = y - xy'$. En el problema,

$$\begin{aligned} d = \text{dist}(Q,O) &= a = y - xy' \\ d^2 = \text{dist}(P,Q)^2 &= (x-0)^2 + (y-a)^2 = x^2 + (y - (y - xy'))^2 \\ &= x^2 + (xy')^2 \end{aligned}$$

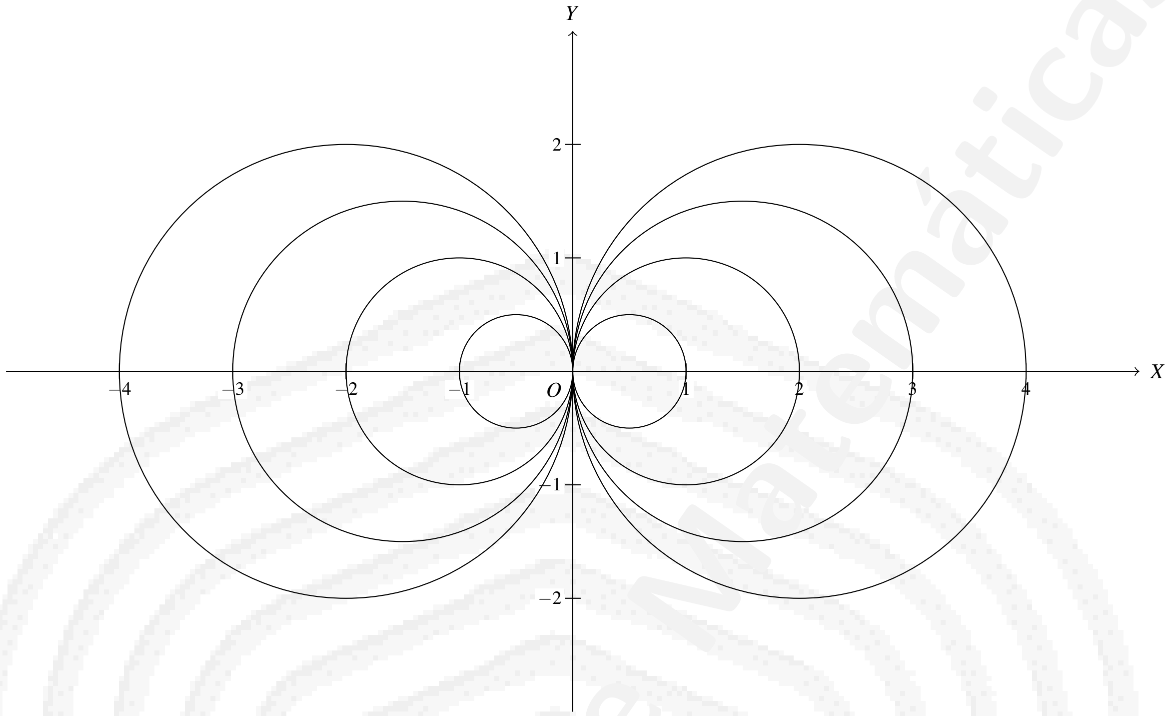
Así que la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} (y - xy')^2 &= x^2 + (xy')^2 \\ y^2 - 2xyy' + \cancel{(xy')^2} &= x^2 + \cancel{(xy')^2} \\ y^2 - 2xyy' &= x^2, \end{aligned}$$

la cual es una ecuación homogenea. Sea $y = vx$, entonces $y' = v + xv'$. Luego

$$\begin{aligned} (vx)^2 - 2xvx(v + xv') &= x^2 \\ v^2x^2 - 2x^2v^2 - 2x^3vv' &= x^2 \\ -2x^3vv' &= x^2 + x^2v^2 = x^2(1 + v^2) \\ -2xv\frac{dv}{dx} &= (1 + v^2) \\ \frac{2vdv}{1 + v^2} &= -\frac{dx}{x} \\ \ln|1 + v^2| &= -\ln|Ax| \\ 1 + v^2 &= \frac{B}{x} \\ 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 &= \frac{B}{x} \\ x^2 + y^2 &= Bx \\ x^2 - 2Cx + y^2 &= 0 \\ (x - C)^2 + y^2 &= C^2. \end{aligned}$$

La familia son las circunferencias centradas en $(C, 0)$ de radio C, $C \neq 0$.



Correcciones y gráficos: Boris Iskra

May 13, 2008